



REALISTISCH MODELLEREN IN HET BASISONDERWIJS: TUSSEN DOELSTELLING EN RESULTAAT

Fien Depaepe, Erik De Corte en Lieven Verschaffel

K.U.Leuven, Centrum voor Instructiepsychologie en -technologie

In deze bijdrage wordt nagegaan hoe het realistisch modelleren, met name het toepassen van wiskunde om problemen uit de realiteit op te lossen, bij leerlingen kan gestimuleerd worden. Vooreerst bespreken we de essentiële stappen van het realistisch modelleringsproces. Vervolgens wordt een overzicht geboden van onderzoek naar de mate waarin leerlingen in staat zijn om geleerde wiskundige begrippen adequaat toe te passen in realistische probleemsituaties, en dus realistisch te modelleren. Daarna wordt aangetoond hoe door middel van het gebruik van boeiende, levensechte problemen en een doordachte aanpak van deze problemen in de klas het realistisch modelleren kan bevorderd worden, niet enkel bij sterkere, maar ook bij middelmatige en zwakkere leerlingen. Aansluitend wordt nagegaan in welke mate in het basisonderwijs aan deze beide voorwaarden (met name, realistische taken en een modelleringsaanpak voor het oplossen van vraagstukken) wordt voldaan. Ten slotte worden een aantal conclusies en adviezen voor de onderwijspraktijk geformuleerd.

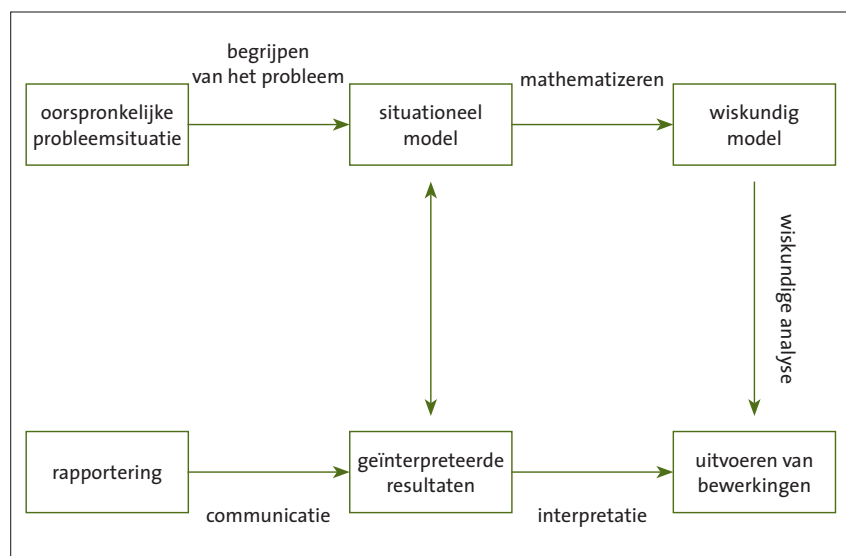
KEYWORDS

realistisch modelleren, vraagstukken, wiskunde, basisonderwijs

VRAAGSTUKKEN: EEN BRUG TUSSEN DE WISKUNDE EN DE REALITEIT

Eén van de voornaamste redenen voor de belangrijke plaats die wiskunde toegeschreven krijgt in het basisonderwijs is haar toepassingsfunctie. Naast het beogen van een algemene, intellectuele ontwikkeling, en het verwerven van een aantal belangrijke wiskundige kenniselementen en vaardigheden, is een belangrijke doelstelling van het wiskundeonderwijs het weten wanneer en hoe wiskunde toe te passen in een verscheidenheid aan situaties in het dagelijkse leven (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000). Voor het toepassen van wiskunde om problemen uit de realiteit op te lossen – ook wel *realistisch modelleren* genoemd – wordt sinds oudsher gebruik gemaakt van vraagstukken. Door hun tweeledige structuur – met name een wiskundig model ingebed in een min of meer realistische context – worden vraagstukken als

Figuur 1: voorstelling van het realistisch modelleringsproces.



een ideaal hulpmiddel beschouwd voor het verbinden van “de twee gezichten” van wiskunde: enerzijds het ontwikkelen van abstracte, formele wiskundige begrippen en anderzijds haar inherente verbondenheid met alledaagse situaties (Greer, 1997).

Het realistisch modelleren is een complex en cyclisch proces dat een aantal fasen omvat (Blum & Niss, 1991; Burkhardt, 1994; Verschaffel e.a., 2000), zoals weergegeven in Figuur 1.

Deze verschillende fasen van het modelleringsproces zijn ook de essentiële stappen die een leerling idealiter zou moeten doorlopen bij het oplossen van een vraagstuk.

Gedurende lange tijd meenden veel beleidsmakers, handboekauteurs en leerkrachten dat er zich geen wezenlijk probleem stelt met deze toepassingsfunctie van vraagstukken (zie bijv. Gerofsky, 1997; Verschaffel e.a., 2000; Verschaffel, Van Dooren, Greer, & Mukhopadhyay, 2010). Steeds meer onderzoeksgegevens tonen



echter aan dat het oplossen van een vraagstuk in de wiskunde iets anders is dan het oplossen van een reëel buitenschools probleem. Bij het oplossen van een vraagstuk wordt, in tegenstelling tot bij het aanpakken van een reëel probleem, enkel rekening gehouden met de elementen die vertaald kunnen worden in puur wiskundige, abstracte termen (Brunner, Pauli, & Reusser, 2010). Deze vertaling van de opgebouwde voorstelling van de probleemsituatie (het situationeel model) in wiskundige termen (het wiskundig model) houdt onvermijdelijk een reductie in. Op zich vormt dit geen probleem integendeel, deze reductie vormt de kwintessens van het modelleringsproces op voorwaarde dat leerlingen een onderscheid kunnen maken tussen situaties waarin een wiskundig model een min of meer exact model, een aanvaardbare benadering, of een inadequaat model is voor het beschrijven en analyseren van de probleemsituatie (Greer, 1997). Bijvoorbeeld, bij het vraagstuk “Jans beste tijd voor het lopen van 100 m is 17 seconden. Hoeveel tijd zal hij nodig hebben om 1500 m te lopen?” is het wiskundig model “ $17s \times 15$ ” slechts een ruwe benadering van de oorspronkelijke probleemstelling (want bij het lopen van een langere afstand zal de gemiddelde snelheid vermoedelijk dalen); terwijl voor het vraagstuk “Om één ei gaar te koken heb je 10 minuten nodig, hoeveel tijd heb je nodig om vier eieren te koken?” “ $4 \times 10 \text{ min}$ ” een totaal verkeerd model is om het vraagstuk op te lossen (want er is geen lineair verband tussen het aantal eieren dat je kookt en de gaartijd). Net deze incompetentie om adequate van inadequate wiskundige modellen te onderscheiden voor het oplossen van een specifiek vraagstuk veroorzaakt heel wat rekenproblemen bij leerlingen.

REALISTISCH MODELLEREN IN HET GEBRUIKELIJKE VRAAGSTUKKENONDERWIJS

Men werd zich meer en meer bewust van de problemen met de toepassingsfunctie van wiskunde

naarmate verschillende studies aantoonde dat veel leerlingen vraagstukken oplossen door middel van het routinematig toepassen van rekenkundige bewerkingen, zonder rekening te houden met de feitelijke inhoud van de probleemstelling en de reële condities en veronderstellingen die eraan ten grondslag liggen (Brunner e.a., 2010). Verschaffel, De Corte en Lasure (1994) onderzochten in welke mate het gebruikelijke vraagstukkenonderwijs bijdraagt tot de vaardigheid van leerlingen om realistisch te modelleren. De onderzoekers ontwikkelden een test, bestaande uit tien itemparen. Het ene vraagstuk uit elk paar was een standaardopgave (S-item) die “gemakkelijk” juist opgelost kan worden door middel van één of twee rekenkundige bewerkingen (optellen, aftrekken, delen, of vermenigvuldigen) met de getallen uit de opgave (bijv. “Wim heeft vijf planken van twee meter gekocht. Hoeveel planken van één meter kan hij daaruit zagen?”). Het andere vraagstuk van elk paar was een opgave met een hoog “probleemgehalte” (P-item) waarbij een doorzichtige aanpak en het gebruik van ervaringskennis vereist is (bijv. Wim heeft vier planken van 2,5 m gekocht. Hoeveel planken van één meter kan hij daaruit zagen?”). De test werd voorgelegd aan leerlingen uit drie klassen van het vijfde leerjaar basisonderwijs. Terwijl het overgrote deel van de leerlingen de S-items correct oploste, was het aantal leerlingen dat rekening hield met de reële situatie bij de P-items alarmerend laag: slechts 17% van alle antwoorden op deze P-items was “realistisch”. De meeste P-items werden opgelost door het uitvoeren van de meest voor de hand liggende, maar evenwel verkeerde, wiskundige bewerking met de getallen uit de opgave. Bijvoorbeeld, voor de P-versie van het zopas vermelde planken-vraagstuk berekenden de meeste leerlingen “ $2,5 \times 4$ ” zonder in hun berekening of in de interpretatie van de beko- men uitkomst (10 planken) rekening te houden met het feit dat

men uit een plank van 2,5 m slechts 2 planken van een meter kan zagen.

Gebruikmakend van gelijkaardige opgaven werd deze studie in zeer verschillende landen herhaald, zoals Ierland (Caldwell, 1995), Venezuela (Hidalgo, 1997), Zwitserland (Reusser & Stebler, 1997) en Japan (Yoshida, Verschaffel, & De Corte, 1997). In enkele van deze replicatiestudies (Reusser & Stebler, 1997; Yoshida e.a., 1997) werden kleine wijzigingen aangebracht in het design van de studie door leerlingen te waarschuwen dat bepaalde vraagstukken moeilijk of zelfs niet op te lossen zijn. Deze waarschuwingen hadden echter weinig invloed op het oplossingsgedrag van leerlingen; hun neiging om niet realistisch te redeneren bleek erg weerbarstig te zijn. In andere replicatiestudies (Caldwell, 1995; Hidalgo, 1997) werd in een individueel interview met de leerlingen gepeild naar de redenen die het niet-realistisch gedrag van leerlingen bij het oplossen van P-items kunnen verklaren. Een belangrijke verklarende factor was hun opvatting dat het oplossen van een schoolvraagstuk weinig of niets te maken heeft met het aanpakken van een reëel probleem (Caldwell, 1995).

Deze studies ondersteunen het vermoeden dat de oorzaak van het oppervlakkig modelleren van leerlingen, waarbij onvoldoende of geen rekening gehouden wordt met de oorspronkelijke probleemstelling, niet een gebrek aan wiskundige kennis of vaardigheden is (Schoenfeld, 1991). Het heeft daarentegen veeleer te maken met hun onjuiste opvattingen over en houdingen tegenover wiskunde en (leren) wiskundig probleemoplossen, die op hun beurt geïnduceerd en in stand gehouden worden door het gebruikelijke wiskundeonderwijs. Meer specifiek menen onderzoekers dat vooral twee aspecten van de klascultuur en –praktijken hiervoor verantwoordelijk zijn, met name (1) het artificiële karakter van de taken waarmee de leerlingen geconfronteerd worden, en (2)



DYSCALCULIE

de routinematige manier waarop deze taken door leerkrachten worden aangepakt in de klas, waarbij rechtstreeks naar de oplossing toe gewerkt wordt met weinig ruimte voor het maken van een juiste voorstelling van de probleemsituatie, zowel in het opstellen van een adequaat wiskundig model als in de interpretatie van de uitkomst van het rekenwerk (Brunner e.a., 2010; Verschaffel e.a., 2000).

HET BEVORDEREN VAN REALISTISCH MODELLEREN BIJ LEERLINGEN

Een aantal studies ging na of het door middel van interventies mogelijk is om het realistisch modelleren bij leerlingen te bevorderen. Deze studies zouden op deze manier mogelijk kunnen bijdragen tot het voorkomen van leerproblemen bij leerlingen. Hieronder bespreken we twee interventiestudies (Verschaffel & De Corte, 1997; Verschaffel, De Corte, Van Vaerenbergh, Lasure, Bogaerts, & Ratinckx, 1998) waarin een alternatieve leeromgeving gecreëerd wordt om tegemoet te komen aan de twee hiervoor vermelde kritieken op het gebruikelijke wiskundeonderwijs. In deze interventiestudies wordt naast klassieke schoolvraagstukken ook gebruik gemaakt van rijke contextopgaven, die qua presentatie (bijv. het gebruik van reclamefolders) en inhoud (bijv. de vraagstelling, beschikbare gegevens) zoveel mogelijk gelijkenis vertonen met de echte problemen uit het dagelijkse leven. Daarnaast wordt een modelleringsaanpak beoogd waarbij zowel recht wordt gedaan aan de onderliggende wiskundige structuur als aan de rijke situationele context van het vraagstuk. In beide interventiestudies wordt het effect van een dergelijke modelleringsaanpak nagegaan op het realistisch modelleren van leerlingen uit de bovenbouw van het basisonderwijs.

LESSEN IN REALISTISCH MODELLEREN

In een eerste interventiestudie ontwikkelden Verschaffel en De Corte

(1997) vijf leseenheden (LE) van 2,5 uur voor het leren realistisch modelleren in de bovenbouw van het basisonderwijs. Daarbij maakten ze gebruik van realistische vraagstukken met een hoog probleemgehalte, gelijkaardig aan de P-items uit Verschaffel e.a.'s (1994) studie. Elk van de vijf LE was opgebouwd rond één welbepaald thema dat te maken heeft met realistisch modelleren, in het bijzonder tijdens de constructie van een gepast wiskundig model voor het situationeel model van een gegeven probleemsituatie en bij het interpreteren van het rekenwerk in functie van de oorspronkelijke vraagstelling. De eerste LE richtte zich op het leren interpreteren van een niet-opgaande deling. Deze LE begon met een verhaal over een regiment van 300 soldaten dat diverse militaire activiteiten uitvoerde. Bij elke militaire activiteit hoorde een vraag, die altijd via dezelfde rekenkundige bewerking kon worden opgelost, maar telkens een ander antwoord vereiste. Bijvoorbeeld, “300 soldaten moeten per jeep naar het oefenterrein. Hoeveel jeeps zijn er nodig, als je weet dat er maximum 8 soldaten in één jeep kunnen plaatsnemen?”. De tweede LE bestond uit probleemsituaties rond sets die gemeenschappelijke elementen hebben en derhalve niet op te lossen zijn door de aantallen van de diverse sets gewoon bij elkaar op te tellen of van elkaar af te trekken. Het uitgangsprobleem betrof een jongen die strips van “Suske en Wiske” verzamelde en ter gelegenheid van zijn verjaardag een groot pak oude albums van “Suske en Wiske” kreeg waaronder verscheidene albums die hij reeds bezat. De leerlingen dienden te berekenen hoeveel strips er na dit geschenk nog ontbraken in de verzameling van deze jongen. In de derde LE stond het optellen en aftrekken van getallen centraal waarbij één getal meer of minder dient gerekend te worden. In het uitgangsprobleem kregen de leerlingen de nummers van het eerst en het laatst verkochte toegangsbiljet op een bepaalde dag in het plaatselijk zwembad, en werd

er gevraagd hoeveel kaartjes er op deze dag verkocht waren. In de vierde LE dienden de leerlingen rekening te houden met bijkomende gegevens die impliciet in het vraagstuk vervat zitten, zoals in het plankenvraagstuk (zie par. 2). In de vijfde LE, tenslotte, werd onderscheid gemaakt tussen toepassingssituaties die wel en niet adequaat gemodelleerd kunnen worden in termen van lineaire verbanden (bijv. het loper-item in par. 1). Naast een uitgangsprobleem kwamen in elke LE ook nog andere vraagstukken voor waaraan dezelfde of een analoge modelleringsmoeilijkheid ten grondslag ligt.

De interventie gebeurde door een onderzoeker, in nauw overleg met de leerkracht, in één klas van het vijfde leerjaar. In twee controleklassen van het zesde leerjaar werd het gewone rekenprogramma afgewerkt. In de drie klassen werd bij aanvang en afloop van de lessenreeks dezelfde voor- en natoets afgenomen, bestaande uit tien vraagstukken met een hoog probleemgehalte gericht op het meten van de vaardigheden van leerlingen om realistisch te modelleren (P-items) en vijf klassieke schoolvraagstukken (S-items). De resultaten toonden een significant positief effect van de interventie in vergelijking met de controlegroepen. Niet enkel sterkere leerlingen, maar ook zwakkere en middelmatige leerlingen bleken een positief effect te ondervinden van de interventie in vergelijking met gelijkaardige controlegroepen.

MODEL VOOR VAARDIG PROBLEEMOPLOSSEN

In een tweede interventiestudie ontwierpen Verschaffel e.a. (1998) een experimentele leeromgeving die, zoals de vorige studie, gebruik maakte van boeiende, levensechte problemen waarvan de oplossing slechts bekomen kan worden na het verrichten van grondig denkwerk, en die gericht was op een doordachte aanpak van deze vraagstukken door leerkrachten in de klas. In aanvulling op de voor-



gaande studie werd meer aandacht besteed aan positieve opvattingen en houdingen tegenover wiskunde. Enkele andere verschilpunten met de vorige studie waren een groter aantal deelnemende klassen en een langer durende interventie, uitgevoerd door de leerkracht in plaats van door de onderzoeker.

De experimentele leeromgeving bestond uit een reeks van 20 lessen, gespreid over drie maanden. Centraal in deze leeromgeving stond een model voor vaardig probleem-oplossen, gericht op het bevorderen van het realistisch modelleren. Kern van het model is een metacognitieve strategie bestaande uit vijf stappen, analoog aan de verschillende fasen van het modelleringsproces, en een stel van acht heuristieken die voornamelijk bruikbaar zijn in de eerste twee stappen van het model (zie Tabel 1).

Bovendien werd gepoogd om een alternatieve klascultuur te creëren rond het leren oplossen van wiskundige problemen met het oog op het bevorderen bij de leerlingen van positieve houdingen en opvattingen tegenover wiskunde. Daartoe werden de leerkrachten onder meer gestimuleerd om in de klas duidelijk te maken dat afhankelijk van de wijze waarop een probleem wordt opgevat er meerdere correcte oplossingswegen en soms zelfs meerdere oplossingen mogelijk zijn; dat wiskunde nuttig is voor het dagelijkse leven; dat iedereen mits de nodige inspanningen wiskundige bekwaamheid kan verwerven; enz.

De experimentele lessenreeks werd geïmplementeerd door vier leerkrachten van het vijfde leerjaar en de resultaten werden vergeleken met gebruikelijk vraagstukkenonderwijs in zeven klassen van het vijfde leerjaar op basis van toetsen die voor en na de lessenreeks werden afgenomen. Deze vergelijking toonde aan dat deze leeromgeving een reële bijdrage kan leveren zowel tot het verwerven van de globale metacognitieve strategie en de erin ingebedde heuristieken, als

Tabel 1: het model voor vaardig probleem oplossen (Verschaffel e.a., 1998).

STAP 1: Ik stel me het probleem voor
Heuristieken:
maak een tekening
maak een tabel
onderscheid noodzakelijke van overbodige gegevens
gebruik je ervaringskennis
STAP 2: Ik beslis hoe ik het probleem zal aanpakken
Heuristieken:
maak een boomdiagram
probeer verstandig uit
zoek een patroon in de gegevens
werk met eenvoudigere getallen
STAP 3: Ik reken uit
STAP 4: Ik interpreteer mijn uitkomst en formuleer mijn antwoord
STAP 5: Ik controleer

tot het ontwikkelen van de vaardigheid van leerlingen om wiskundige toepassingsproblemen op te lossen, niet enkel bij de sterkere leerlingen maar ook bij de middelmatige en zwakkere. Bovendien werd vastgesteld dat langs deze weg gewerkt kon worden aan de positieve houdingen en opvattingen van leerlingen.

Ook andere interventiestudies met een vergelijkbare opzet (zie bijv. Mason & Scrivani, 2004) leverden gelijkaardige bevindingen op en tonen dus aan dat het realistisch modelleren kan aangeleerd worden en tot betere leerprestaties leidt bij sterkere, middelmatige én zwakkere leerlingen, mits wijzigingen in de aanpak van het vraagstukkenonderwijs, zowel wat betreft (1) de aard van de taken en (2) de manier waarop de taken in de klas behandeld worden.

HET IMPLEMENTEREN VAN REALISTISCH MODELLEREN IN DE KLASPRAKTIJK

In lijn met het hierboven geschetst interventieonderzoek benadrukken recente beleidsdocumenten met betrekking tot het wiskundeonderwijs kenmerken van deze modelleringsaanpak. Bijvoorbeeld, in de Vlaamse eindtermen voor wiskunde in het basisonderwijs (Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap, 2001) wordt een doordachte aan-

pak bij het oplossen van wiskundige problemen beoogd "De leerlingen zijn bereid zichzelf vragen te stellen over hun aanpak voor, tijdens en na het oplossen van een wiskundig probleem en willen op basis hiervan hun aanpak bijsturen" (p. 113). Deze vernieuwende visie op het wiskundeonderwijs inspireerde en beïnvloedde ook een nieuwe generatie van handboeken. Zo verwijst het handboek *Eurobasis* (Boone, D'haveloose, Muylle, & Van Maele, s.d.)¹ bijvoorbeeld zeer uitdrukkelijk naar het door Verschaffel e.a. (1998) ontwikkelde model voor vaardig probleemoplossen. De vraag blijft echter in welke mate het introduceren van deze modelleringsaanpak in handboeken de praktijk van het vraagstukkenonderwijs ook effectief beïnvloedt. Tot op heden werd dit weinig systematisch onderzocht (Brunner e.a., 2010; Chapman, 2006). Toch menen onderzoekers dat slechts weinig leerkrachten erin slagen om het realistisch modelleren bij leerlingen te stimuleren (zie bijv. Niss, 2001).

In een recente studie volgden we gedurende zeven maanden twee leerkrachten van het zesde leerjaar en onderzochten we hoe ze vraagstukkenlessen gebaseerd op het handboek *Eurobasis* implementeerden. Het onderzoek richtte zich

¹ Voorloper van het handboek Kompas bij de uitgeverij Die Keure.



DYSCALCULIE

onder meer op (1) de aard van de taken die in de lessen aan bod komen (Depaepe, De Corte, & Verschaffel, 2009) en (2) de manier waarop leerkrachten met deze vraagstukken omgaan in de klas (Depaepe, De Corte, & Verschaffel, 2010).

DE AARD VAN DE VRAAGSTUKKEN

Ons onderzoek richtte zich op de aard van de taken waarmee leerlingen geconfronteerd worden in het vraagstukkenonderwijs. Hiervoor verrichtten we een tweevoudige analyse. Vooreerst deden we een diepgaande analyse van alle taken die in het handboek *Eurobasis* aan bod komen. Daarnaast bestudeerden we gedurende zeven maanden de taken die twee leerkrachten van het zesde leerjaar selecteerden uit het handboek evenals de taken die ze zelf opstelden in functie van hun vraagstukkenlessen (voor een uitgebreid overzicht, zie Depaepe e.a., 2009).

Voor de analyse van het realistisch gehalte van de taken (zowel de handboektaken als deze ontwikkeld door de leerkracht) deden we beroep op een codeerschema ontwikkeld door Palm en Burman (2004). De centrale gedachte van dit codeerschema is het begrip *simulatie*: een vraagstuk wordt als realistisch beschouwd als bepaalde aspecten ervan vergelijkbaar zijn met een gelijkaardige situatie uit het dagelijkse leven. De aspecten opgenomen in het codeerschema zijn weergegeven in Tabel 2. Voor elk van deze aspecten werd nagegaan of het vraagstuk een gelijkaardige situatie uit de realiteit nabootst of niet, en werd hieraan respectievelijk een code "1" of "0" toegekend.

De voornaamste resultaten kunnen als volgt samengevat worden. Ten eerste, de selectie door de leerkracht van handboektaken gebeurde eerder volgens de volgorde waarin ze vermeld worden in het handboek (bijv. de leerkracht behandelde de eerste vijf taken uit het handboek, voor de daaropvolgende taken was geen tijd meer in de les) dan dat de keuze werd

Tabel 2: aspecten uit het codeerschema van Palm en Burman (2004).

Aspect	Omschrijving
Gebeurtenis	Komt de beschreven gebeurtenis in de realiteit voor?
Vraag	Kan de vraag gesteld worden in een overeenkomstige situatie in de realiteit?
Doel	Is het doel van het oplossen van het vraagstuk duidelijk?
Beschikbare gegevens	Worden dezelfde gegevens beschikbaar gesteld als in een overeenkomstige realistische situatie?
Realistisch gehalte van de gegevens	Nemen de gegevens dezelfde waarde aan als in de realiteit?
Specificiteit van de gegevens	Beschrijft de opgave een specifieke situatie waarin de subjecten, de objecten en de plaatsen gespecificeerd worden?
Taalgebruik	Is het taalgebruik in het schoolvraagstuk analoog aan het dagelijkse taalgebruik?
Beschikbare oplossingsmethoden	Kunnen leerlingen gelijkaardige oplossingsstrategieën gebruiken om het vraagstuk op te lossen zoals de persoon zou aanwenden bij het oplossen van een gelijkaardig probleem in de realiteit?
Externe hulpmiddelen	Zijn dezelfde externe hulpmiddelen (bijv. rekenmachine, kaarten) ter beschikking als bij de oplossing van een gelijkaardig probleem in de realiteit?
Geboden hulp	Wordt de probleemoplosser in dezelfde mate begeleid in het oplossingsproces als bij het oplossen van een overeenkomstige situatie in de realiteit?
Oplossingsvereisten	Wordt aan de oplossing van het vraagstuk gelijkaardige vereisten gesteld als in een vergelijkbare realistische situatie?

ingegeven door de aard van de taken (bijv. er werd niet doelbewust gekozen voor de meest realistische taken). Ten tweede, de aard van de extra taken opgesteld door de leerkracht is gelijklopend met de handboektaken. Deze bevinding ligt in de lijn van Gerofsky's (1997) conclusie dat leerkrachten vraagstukken opstellen vanuit hun eigen ervaringen met vraagstukken, en niet vanuit een doelbewuste poging om reële probleemsituaties na te bootsen. Ten derde, de geanalyseerde vraagstukken bootsten een aanzienlijk aantal aspecten uit overeenkomstige situaties uit de realiteit na, zoals de gebeurtenis, de beschikbare gegevens, het realistisch gehalte van de gegevens, het taalgebruik, de oplossingsstrategieën en -vereisten. Daarentegen was de simulatie van een aantal andere aspecten meer problematisch, zoals de vraag, de specificiteit van de gegevens, het doel, de externe hulpmiddelen en

de geboden hulp. Deze resultaten zijn gelijklopend aan het onderzoek van Palm en Burman (2004) in Finland en Zweden.

Een tekortkoming in het schema van Palm en Burman (2004) is dat er niet wordt nagegaan of vraagstukken ook echte realistische modelleringsproblemen zijn. Bij modelleringsvraagstukken is het gebruik van ervaringskennis die impliciet in de opgave vervat zit, vereist om een adequaat situationeel model op te bouwen en tot een correcte oplossing ervan te komen (zie de P-items in par. 2). Een bijkomende analyse van de gebruikte taken toonde aan dat slechts weinig vraagstukken echte realistische modelleringsproblemen zijn waarbij ervaringskennis nodig is bij het vertalen van de oorspronkelijke probleemstelling naar het wiskundige model, of in de interpretatie van de bekomen oplossing. Bijna alle vraagstukken zijn – vanuit realistisch modellerings-



oogpunt – standaardtaken waarbij de oplossing gevonden wordt door middel van één of meerdere rekenkundige bewerkingen met de getallen uit de opgave. Algemeen gesteld, worden de leerlingen uit de bestudeerde klassen geconfronteerd met vraagstukken met een hoog “realiteitsgehalte”, maar met een beperkt “probleemgehalte”. De kansen die daarbij gecreëerd worden voor het inoefenen van het realistisch modelleren zijn derhalve beperkt.

DE MANIER WAAROP LEERKRACHTEN DEZE VRAAGSTUKKEN BEHANDELEN

Even belangrijk als de aard van de taken is de manier waarop deze vraagstukken aangepakt worden in de klas. Om een antwoord te bieden op deze vraag, verrichtten we een diepgaande analyse van alle op video opgenomen vraagstukkenlessen over een periode van zeven maanden bij twee leerkrachten uit het zesde leerjaar (Depaepe e.a., 2010).

Daarbij gingen we na of deze vraagstukken werden aangewend als hulpmiddel voor realistisch modelleren. Zoals eerder vermeld (zie par. 1), richt deze modelleringsaanpak zich zowel op de ontwikkeling van abstracte, formele wiskundige begrippen als op de inbedding van deze begrippen in het dagelijkse leven. In dit verband maakt Chapman (2006) een onderscheid tussen een *paradigmatische* en een *narratieve* aanpak bij het oplossen van vraagstukken. In een paradigmatische aanpak ligt de nadruk op de wiskundige structuur (het wiskundig model), terwijl de narratieve aanpak elementen uit de context waarin een vraagstuk is ingebed, benadrukt (het situationeel model). Wil men realistisch modelleren bij leerlingen bewerkstelligen, dan dienen beide aspecten te worden benadrukt. Zowel bij het begin van de modelleringscyclus – met name, het begrijpen van de verschillende elementen en hun relaties in de oorspronkelijke probleemstelling

(het situationeel model) en de integratie ervan in een passend wiskundig model – als op het einde van de modelleringscyclus – met name, het interpreteren van de juistheid en zinvolheid van de bekomen uitkomst in het licht van de context zoals deze zich in de realiteit voordoet – zijn er aangrijpingspunten om een paradigmatische en narratieve aanpak op het oplossen van vraagstukken op een evenwichtige manier uit te werken. Geïnspireerd door Chapmans onderscheid maakten we een codeerschema van mogelijke bijdragen die leerkrachten kunnen leveren aan de paradigmatische en narratieve aanpak, zowel bij het begin als op het einde van de modelleringscyclus. Dit codeerschema is weergegeven in Tabel 3.

Voor elk vraagstuk dat klassikaal werd besproken, werd nagegaan welke interventies voorkwamen in het eerste gedeelte (P1-P3; N1-N4) en in het laatste gedeelte van de modelleringscyclus (P4-P5; N5-N7).

Tabel 3: paradigmatische en narratieve interventies bij het oplossen van vraagstukken.

Aanpak	Fase	Code	Interventie
Paradigmatisch	Begin	P1	Het differentiëren tussen wat wel en niet van belang is voor de oplossing van het vraagstuk en/of het vertalen van wat gegeven is in wiskundige termen.
		P2	Het omzetten van wat gegeven is in de opgave in een oplossingsschema dat de probleemoplosser helpt om het vraagstuk op te lossen.
		P3	Het benadrukken van de structurele gelijkenissen van het vraagstuk met analoge vraagstukken en/of het benoemen van het vraagstuk in termen van een bepaald type van problemen.
	Einde	P4	Controleren of geen fouten werden gemaakt en/of alle vragen werden beantwoord.
		P5	Het benadrukken van de structurele gelijkenissen van het vraagstuk met analoge vraagstukken, en/of het benoemen van het vraagstuk in termen van een bepaald type van problemen, en/of herhalen hoe een bepaald type van problemen opgelost kan worden.
Narratief	Begin	N1	Het vraagstuk in eigen woorden navertellen, gebaseerd op de informatie die gegeven in de opgave.
		N2	De betekenis van objecten, personen en/of situaties uit de opgave verduidelijken.
		N3	Het vraagstuk relateren aan persoonlijke ervaringen, en/of verwijzen naar een verwante gebeurtenis die in de realiteit gebeurde, en/of uitweiden over de ervaringen van leerlingen m.b.t. objecten uit de opgave, en/of voortbouwen op de voorkennis van leerlingen.
		N4	Het identificeren van en rekening houden met de condities en veronderstellingen van een overeenkomstig reëel probleem bij het opstellen van het wiskundig model. Dit kan leiden tot het bekritisseren en herformuleren van het vraagstuk zoals het aanvankelijk geformuleerd werd.
	Einde	N5	Het interpreteren van de uitkomst in het licht van de oorspronkelijke probleemstelling en/of het zoeken van verklaringen voor het bekomen resultaat.
		N6	Het verwijzen naar overeenkomstige probleemsituaties in de realiteit en/of de relevantie van het leren oplossen van dit type vraagstukken bespreken.
		N7	Het identificeren van en rekening houden met de condities en veronderstellingen van een overeenkomstig reëel probleem bij het opstellen van het wiskundig model. Dit kan leiden tot het bekritisseren en herformuleren van het vraagstuk zoals het aanvankelijk geformuleerd werd.



DYSCALCULIE

Tevens werd de tijd die aan elk van de interventies werd besteed, geregistreerd.

De resultaten toonden, ten eerste, aan dat beide leerkrachten een sterkere paradigmatische dan narratieve aanpak vertoonden bij het oplossen van vraagstukken in de klas (meer bepaald besteedden ze dubbel zoveel tijd aan de P- dan aan de N-interventies). Met andere woorden, er ging meer aandacht naar het construeren van een wiskundig model van het vraagstuk dan naar het opbouwen van een situationeel model. Ten tweede, stelden we vast dat uiterst zelden aandacht wordt besteed aan de relatie tussen het situationeel model en het wiskundig model (interventies N4 en N7). Deze vaststelling is vanuit een theoretische invalshoek belangrijk omdat deze interventies tot de kern van het realistisch modelleren behoren en net dit inzicht in de discrepantie tussen beide modellen verantwoordelijk wordt geacht voor het doordacht en correct oplossen van vraagstukken met een hoog probleemgehalte (zie bijv. Greer, 1997). Vanuit een praktijkgerichte invalshoek kan de afwezigheid van deze interventies echter verklaard worden doordat het implementeren van een realistische modelleringsaanpak gepaard gaat met heel wat onzekerheden en moeilijkheden. Op deze laatste vaststelling wordt in het concluderende gedeelte verder ingegaan.

CONCLUSIES EN ADVIEZEN

Het onderzoek hierboven beschreven toont aan dat wijzingen in de klascultuur en -praktijken kunnen leiden tot het doordacht aanpakken van wiskundige vraagstukken, niet enkel bij sterkere leerlingen, maar ook bij middelmatige en zwakkere (Verschaffel & De Corte, 1997; Verschaffel e.a., 1998). Deze wijzigingen hebben zowel te maken met (1) de aard van de problemen waarmee leerlingen geconfronteerd worden als met (2) de manier waarop met deze problemen in de klas wordt omgegaan. Wat het eerste aspect

betreft, is het wenselijk dat in de vraagstukkenlessen gebruik wordt gemaakt van boeiende, levensechte problemen waarbij het gebruik van ervaringskennis die impliciet in de opgave vervat zit, vereist is. Wat het tweede aspect betreft, wordt een modelleringsaanpak aangeraden waarbij recht wordt gedaan aan de complexe wiskundige structuur én aan het specifieke karakter van de context van het vraagstuk, zowel tijdens de constructie van een gepast wiskundig model als bij het interpreteren van de uitkomst in het licht van de oorspronkelijke vraagstelling.

Hoewel slechts in een beperkt aantal klassen onderzoek werd gedaan, toont een analyse van het gebruikelijke vraagstukkenonderwijs een aantal knelpunten met betrekking tot beide aspecten. Ten eerste zijn de meeste vraagstukken in het gangbare onderwijs ingebed in een voor leerlingen betekenisvolle context; evenwel kunnen ze worden opgelost met de meest voor de hand liggende wiskundige bewerking met de getallen uit de opgave (Depaepe e.a., 2009). Hoewel deze standaardvraagstukken heel wat mogelijkheden bieden voor het aanleren van prototypische oplossingschema's (en ze vervolgens een plaats verdienen in het vraagstukkenonderwijs), dienen ze aangevuld te worden met realistische modelleringsvraagstukken, zodat leerlingen in staat zijn te onderscheiden tussen situaties waarin bepaalde oplossingschema's tot een adequaat of inadequaat antwoord leiden. Ten tweede blijken leerkrachten in slechts enkele gevallen uitdrukkelijk aandacht te besteden aan de relatie tussen het situationeel en het wiskundig model; doorgaans wordt rechtstreeks naar de oplossing toegewerkt (Depaepe e.a., 2010).

Verklaringen voor de afwezigheid van een realistisch modelleringsperspectief in de onderwijspraktijk zijn onder meer de tijdsdruk waarmee leerkrachten geconfronteerd worden om het curriculum af te ronden, het stereotiepe karakter van de

vraagstukken in de handboeken, de inspanning die de implementatie van de leerkracht vraagt en de opvattingen van de leerkrachten zelf over de wenselijkheid van deze modelleringsaanpak voor alle niveaus van leerlingen (Hatano, 1997; Inoue, 2008). Echter, wil men voorkomen dat leerlingen op een ondoordachte manier wiskundige problemen oplossen en het oplossen van een schoolvraagstuk als iets wezenlijk anders beschouwen dan het aanpakken van een reëel probleem, dan zal het onderwijsbeleid en de – praktijk inspanningen moeten leveren, zowel wat betreft het voorzien van uitdagende wiskundige taken als het bieden van ondersteuning bij de implementatie ervan. In dit verband zal in de lerarenopleiding alsook in de professionele begeleiding van leerkrachten intensief aandacht moeten worden besteed aan de manier waarop het realistisch wiskundig modelleren in de dagelijkse klaspraktijk adequaat kan geïmplementeerd worden.

REFERENTIES

- Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects-state, trends, and issues in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37–68.
- Boone, M., D'haveloose, W., Muylle, H., & Van Maele, K. (s.d.). *Eurobasis 6. Brugge: Die Keure*.
- Brunner, E., Pauli, C., & Reusser, K. (2010). Understanding-oriented mathematics instruction using the example of solving a word problem. *Journal für Mathematik und Didaktik*, 31, 31–50.
- Burkhardt, H. (1994). Mathematical applications in school curriculum. In T. Husén, & T. N. Postlethwaite (Eds.), *The international encyclopedia of education* (2nd ed., pp. 3621–3624). Oxford: Pergamon Press.
- Caldwell, L. (1995). *Contextual considerations in the solution of child-*



- ren's multiplication and division word problems. Niet-gepubliceerde verhandeling, Queen's University, Belfast, Northern Ireland.
- Chapman, O. (2006). Classroom practices for context of mathematics word problems. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 211-230.
- Depaepe, F., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2009). Analysis of the realistic nature of word problems in current elementary mathematics education. In L. Verschaffel, B. Greer, W. Van Dooren, & S. Mukhopadhyay (Eds.), *Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations* (pp. 245-263). Rotterdam: Sense Publishers.
- Depaepe, F., De Corte, E., & Verschaffel, L. (2010). Teachers' approaches towards word problem solving: Elaborating or restricting the problem context. *Teaching and Teacher Education*, 26, 152-160.
- Gerofsky, S. (1997). An exchange about word problems. For the Learning of *Mathematics*, 17, 22-23.
- Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms. *Learning and Instruction*, 7, 293-307.
- Hatano, G. (1997). Commentary. Cost and benefit of modeling activity. *Learning and Instruction*, 7, 383-387.
- Hidalgo, M. C. (1997). *L'activation des connaissances à propos du monde réel dans la résolution de problèmes verbaux en arithmétique*. Niet-gepubliceerd doctoraatsproefschrift, Université Laval, Québec, Canada.
- Inoue, N. (2008). Minimalism as a guiding principle: Linking mathematical learning to everyday knowledge. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 36-67.
- Mason, L., & Scrivani, L. (2004). Enhancing students' mathematical beliefs: An intervention study. *Learning and Instruction*, 14, 153-176.
- Ministerie van de Vlaamse Gemeenschap. (2001). *Ontwikkelingsdoelen en eindtermen. Informatiemap voor de onderwijspraktijk, gewoon basisonderwijs*. Brussels, Belgium: Departement Onderwijs.
- Niss, M. (2001). Issues and problems of research on the teaching and learning of applications and modelling. In J. F. Matos, W. Blum, S. K. Houston, & S. P. Carreira (Eds.), *Modelling and mathematics education. ICTMA 9: Applications in science and technology* (pp. 72-89). Chichester: Horwood.
- Palm, T., & Burman, L. (2004). Reality in mathematics assessment: An analysis of task-reality concordance in Finnish and Swedish national assessments. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 9(3), 1-33.
- Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution: The social rationality of mathematical modeling in schools. *Learning and Instruction*, 7, 309-327.
- Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. F. Voss, D. N. Perkins, & J. W. Segal (Eds.), *Informal reasoning and education* (pp. 311-343). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Teaching realistic mathematical modelling and problem solving in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 577-601.
- Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction*, 4, 273-294.
- Verschaffel, L., De Corte, E., Van Vaeckenbergh, G., Lasure, S., Bogaerts, H., & Ratinckx, E. (1998). *Leren oplossen van wiskundige contextproblemen in de bovenbouw van de basisschool*. Leuven: Universitaire Pers Leuven.
- Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.
- Verschaffel, L., Van Dooren, W., Greer, B., & Mukhopadhyay, S. (2010). Reconceptualising word problems as exercises in mathematical modelling. *Journal für Mathematik und Didaktik*, 31, 9-29.
- Yoshida, H., Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Realistic considerations in solving problematic word problems: Do Japanese and Belgian children have the same difficulties? *Learning and Instruction*, 7, 329-338.

CORRESPONDENTIEADRES

Fien Depaepe,
Centrum voor Instructiepsychologie en -technologie,
K.U.Leuven,
Vesaliusstraat 2,
3000 Leuven,
fien.depaepe@ped.kuleuven.be